Emparejamiento máximo. Grafos bipartitos

# Definiciones

## Emparejamiento

Un emparejamiento es un conjunto de aristas del grafo tales que no hay dos de ellas que tengan un nodo en común.

## Emparejamiento máximo

Un emparejamiento máximo es un emparejamiento con la mayor cantidad de aristas posible.

## Emparejamiento perfecto

Un emparejamiento perfecto es un emparejamiento donde todo nodo pertenece a alguna arista.

## Camino incremento

Dado un grafo G y en emparejamiento M, un camino x0, y0, x1, y1,…, xk-1, yk-1, xk se dice de incremento en M si para todo i = 0,1,…,k-1 la arista (xi,yi) no pertenece a M, mientras que la arista (yi,xi+1) si, y además no hay ninguna arista de M incidente a x0 o xk. Nótese que si se tiene un camino incremento, al invertir las aristas del mismo, o sea hacer que las que no pertenecían a M pertenezcan y quitar las que pertenecían, se obtiene un emparejamiento con una arista más.

## Camino simple incremento

Es un camino simple incremento, o sea, un camino incremento que no repite vértices.

# Teorema

En un grafo bipartito un emparejamiento es máximo si y solo si no existe ningún camino simple incremento.

## Demostración

Está claro que si para un emparejamiento existe un camino simple incremento, este no es máximo, ya que al invertir las aristas del mismo se obtiene un emparejamiento mayor.

A continuación se va a probar que si un emparejamiento no es máximo entonces contiene un camino simple incremento.

Sea M\* un emparejamiento máximo, y F el conjunto de aristas tales que están en M o en M\* pero no en los dos a la vez. Las aristas y los vértices de F forman un grafo en el que cada nodo tiene grado 1 o 2, por lo tanto las componentes de grafo son caminos simples o ciclos. En cada ciclo o camino simple, las aristas alternan entre aristas que pertenecen a M y las que pertenecen a M\*. Como |M\*|>|M|, debe haber al menos una componente donde hay más aristas que pertenecen a M\* que a M, esta componente no puede ser un ciclo, ya que entonces tendría longitud impar lo cual no puede ser debido a que el grafo es bipartito, por lo tanto tiene que ser un camino simple incremento para M.

# Algoritmo

El teorema anterior brinda la siguiente estrategia para hallar un emparejamiento máximo en un grafo bipartito:

1. Empezar con cualquier emparejamiento M (puede ser una sola arista).
2. Buscar un camino simple incremento en M.
3. Si se encontró un camino simple incremento, invertir las aristas del mismo para encontrar un mejor emparejamiento. Volver al paso 2.
4. Si no se encontró ningún camino simple incremento parar, ya se encontró un emparejamiento máximo.

Para buscar un camino simple incremento en el paso 2, se puede hacer mediante un DFS partiendo de cualquier nodo. Como cada vez que se encuentra un camino incremento se aumenta en 1 la cantidad de aristas del emparejamiento, hay que repetir este procedimiento tantas veces como el mínimo entre los tamaños de las particiones. O sea, si V1 y V2 son la cantidad de nodos de la primera y segunda partición respectivamente, y V1 es la menor de las dos, el orden del algoritmo sería O(V1\*V1\*V2), aunque hay algoritmos más eficientes, como el de Hopcroft-Karp que lo resuelve en O(sqrt(V)\*E) donde V y E son la cantidad total de nodos y aristas respectivamente en el grafo.

## Implementación

**bool** **augment**(**int** v)

{

**for**(**int** i = 0; i < V2; i++)

{

**if**(g[v][i] && !mk[i])

{

mk[i] = **true**;

**if**(match[i] == -1 || augment(match[i]))

{

match[i] = v;

**return** **true**;

}

}

}

**return** **false**;

}

**int** **matching**()

{

**int** ans = 0;

**memset**(match,-1,**sizeof**(match));

**for**(**int** i = 0; i < V1; i++)

{

**memset**(mk,0,**sizeof**(mk));

**if**(augment(i)) ans++;

}

**return** ans;

}

# Aplicaciones

## Aplicación 1

Hallar el tamaño del menor cubrimiento de vértices en un grafo bipartito. Un cubrimiento de vértices en un grafo es un conjunto de vértices tal que toda arista del grafo tiene al menos un vértice en dicho conjunto.

#### Solución

Por el teorema de Konig el tamaño del menor cubrimiento de vértices en un grafo bipartito es igual al tamaño del mayor emparejamiento en el mismo. Lo único que hay que hacer es aplicar el algoritmo descrito para identificar un emparejamiento máximo en el grafo.

## Aplicación 2

Hallar el tamaño del mayor conjunto independiente en un grafo bipartito.

#### Solución

El tamaño del mayor conjunto independiente es igual a N (cantidad de nodos del grafo) – M, donde M es el tamaño del menor cubrimiento de vértices posible. Pero en el problema anterior se describió como hallar el tamaño del menor cubrimiento de vértices a través de un emparejamiento máximo.

# Problemas

## COJ 2606 - Attacking Rooks (Regional Latinoamérica 2013)

Chess inspired problems are a common source of exercises in algorithms classes. Starting with the well known 8-queens problem, several generalizations and variations were made. One of them is the N-rooks problem, which consists of placing N rooks in an N by N chessboard in such a way that they do not attack each other.

Professor Anand presented the N-rooks problem to his students. Since rooks only attack each other when they share a row or column, they soon discovered that the problem can be easily solved by placing the rooks along a main diagonal of the board. So, the professor decided to complicate the problem by adding some pawns to the board. In a board with pawns, two rooks attack each other if and only if they share a row or column and there is no pawn placed between them. Besides, pawns occupy some squares, which gives an additional restriction on which squares the rooks may be placed on.

Given the size of the board and the location of the pawns, tell Professor Anand the maximum number of rooks that can be placed on empty squares such that no two of them attack each other.

#### Entrada

The first line contains an integer N (1 <= N <= 100) representing the number of rows and columns of the board. Each of the next N lines contains a string of N characters. In the i-th of these strings, the j-th character represents the square in the i-th row and j-th column of the board. The character is either "." (dot) or the uppercase letter "X", indicating respectively an empty square or a square containing a pawn.

#### Salida

Output a line with an integer representing the maximum number of rooks that can be placed on the empty squares of the board without attacking each other.

#### Solución

Lo primero que hay que notar en este problema es que las columnas y las filas están divididas en fragmentos donde solo puede haber una torre.

Ejemplo:

|  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- |
|  |  |  |  |  |
|  |  |  |  |  |
|  |  |  |  |  |
|  |  |  |  |  |
|  |  |  |  |  |

Para resolver el problema podemos construir el siguiente grafo bipartito G = <V,U,E>, donde V contiene un nodo por cada grupo horizontal, U contiene un nodo por cada grupo vertical y existe una arista (u,v) si sus grupos correspondientes comparten una casilla. A cada casilla no tachada del tablero le corresponde exactamente una arista en el grafo, ya que es la intersección del grupo vertical y el grupo horizontal en que se encuentra.

A continuación se va a probar que una solución al problema es equivalente a un emparejamiento máximo en G.

Si se tiene una solución al problema, o sea un conjunto de casillas que no se atacan, sus aristas correspondientes en G forman un emparejamiento, pues cada nodo correspondiente a un grupo vertical aparece a lo sumo en una arista, ya que de lo contrario habría más de una casilla en la solución proveniente de un mismo grupo vertical, lo cual no puede ser, y lo mismo sucede con los nodos correspondientes a grupos horizontales.

Si se tiene un emparejamiento en G, las casillas del tablero correspondientes a las aristas que pertenecen al emparejamiento son una solución válida al problema, ya que cada nodo pertenece a lo sumo a una arista, o lo que es lo mismo cada grupo contiene a lo sumo una casilla de la solución.

Por lo tanto para hallar la solución solo hay que calcular el tamaño del emparejamiento máximo en G.

## COJ 2123 - Game of Tiles (Regional Latinoamérica 2012)

The Game of Tiles is a game for two players played over a rectangular board in the form of a table of R rows and C columns of square cells called tiles. At the beginning of the game, some of the tiles may be painted black and the rest remain white. Then, Player 1 and Player 2 alternate turns making a move and the first one that cannot make a valid move loses the game. The first move of the game is done by Player 1 and consists of choosing a white tile and writing the number 1 on it. After that, each subsequent move i consists of writing number i on an unused white tile that is adjacent horizontally or vertically (but not diagonally) to the tile numbered i − 1. Note that Player 1 always writes odd numbers and Player 2 always rites even numbers.

Your task is to write a program that given the initial configuration of the board, determines which player will win, if both of them play optimally.

#### Entrada

Each test case is described using several lines. The first line contains two integers R and C representing respectively the number of rows and columns of the board (1 <= R, C <= 50). The i-th of the next R lines contains a string Bi of C characters that describes the i-th row of the initial board. The j-th character of Bi is either “.” (dot) or the uppercase letter “X”, representing that the tile at row i and column j is respectively white or black. Within each test case at least one of the tiles is white.

#### Salida

For each test case output a line with an integer representing the number of the player (1 or 2) who will win the game if both of them play optimally.

#### Solución

Se va a probar que si el grafo tiene un emparejamiento perfecto entonces gana el segundo jugador de lo contrario gana el primero.

Supongamos que el grafo tiene un emparejamiento perfecto M. El primer jugador selecciona una casilla, y el segundo jugador se mueve para su pareja en M, esto lo puede hacer porque M es un emparejamiento perfecto, así que toda casilla tiene una pareja. El segundo paso del primer jugador va a ser moverse a otra casilla no visitada, así que el segundo jugador se puede mover para la pareja de esta casilla. Jugando siempre de esta forma el segundo jugador siempre tiene la opción de moverse a la pareja de la casilla que seleccionó el primero, por lo tanto nunca pierde.

Si el grafo no tiene un emparejamiento perfecto, sea M un emparejamiento máximo. Entonces existe un nodo que no pertenece a ninguna arista de M. La estrategia del primer jugador es seleccionar este nodo, luego el segundo jugador se tiene que mover para un vértice que tiene pareja en M, ya que de lo contrario se pudiera añadir la arista que tomó a M, y entonces M no sería máximo. El primer jugador se mueve para la pareja de la casilla actual. En la próxima jugada el segundo jugador se tiene que mover por una arista que no pertenece al emparejamiento, y el 1er jugador continúa moviéndose para la pareja de la casilla que tomó el 2do jugador. Si en un momento determinado, el 2do jugador no puede jugar, esto significa que existe un camino de incremento en M (la primera casilla no pertenece a ninguna arista de M, el 1er y 2do jugador alternan moviéndose por aristas que pertenecen a M, la última casilla tampoco tiene pareja), pero esto es una contradicción ya que M es un emparejamiento máximo.

## Caballos

Se tiene un tablero de ajedrez, que tiene casillas no válidas. Hay que hallar cual es la mayor cantidad de caballos que se pueden colocar en el tablero (en casillas válidas) de forma tal que no haya dos que se ataquen.

#### Solución

Si se considera el tablero de ajedrez, como un grafo donde los nodos son las casillas, y hay una arista entre dos casillas si existe un movimiento de caballo para moverse entre ellas, entonces se tendrá un grafo bipartito, ya que los movimientos de un caballo siempre van de una casilla blanca a una negra o al revés. Además se quiere hallar la mayor cantidad de casillas donde se puedan colocar caballos sin que se ataquen entre ellos, o lo que es lo mismo el mayor tamaño de un conjunto de casillas que sean independientes, o sea que no haya ninguna arista entre ellas (Aplicación 2).

## Permutación de cadenas

Se tiene una cadena y se quiere permutar sus caracteres de forma tal que la cadena resultante tenga la menor cantidad de caracteres en la misma posición que estaban originalmente.

**Ejemplo**

Para aaabc lo mejor es bcaaa, ya que solo 1 caracter permanece en la misma posición.

Solución

Se construye un grafo bipartito donde en la primera partición está el multiconjunto de caracteres que forman la cadena, y en la segunda partición están las posiciones en la cadena. Se construye una arista entre un carácter y una posición si ese carácter (o uno igual e él) no estaba originalmente en esa posición. El tamaño del mayor emparejamiento en el grafo representa la mayor cantidad de caracteres que pueden ponerse en posiciones distintas a las que ocupaban originalmente.